



TITLE:

DS-diagram with E-cycleの example(Theory of Spines of 3- manifolds)

AUTHOR(S):

池田, 裕司

CITATION:

池田, 裕司. DS-diagram with E-cycleのexample(Theory of Spines of 3-manifolds). 数理解析研究所講究録 1985, 563: 96-104

ISSUE DATE:

1985-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99067>

RIGHT:

DS-diagram with E-cycle の example

神戸大学教養部 池田裕司 (Hiroshi Ikeda)

Def. (S^2, G) : DS-diagram, E : subpolyhedron of G .
 E が (S^2, G) の E-cycle である。

≡ (i) E は 1-sphere である。

(ii) E は $S_2(P)$ の一筆描きを与える。

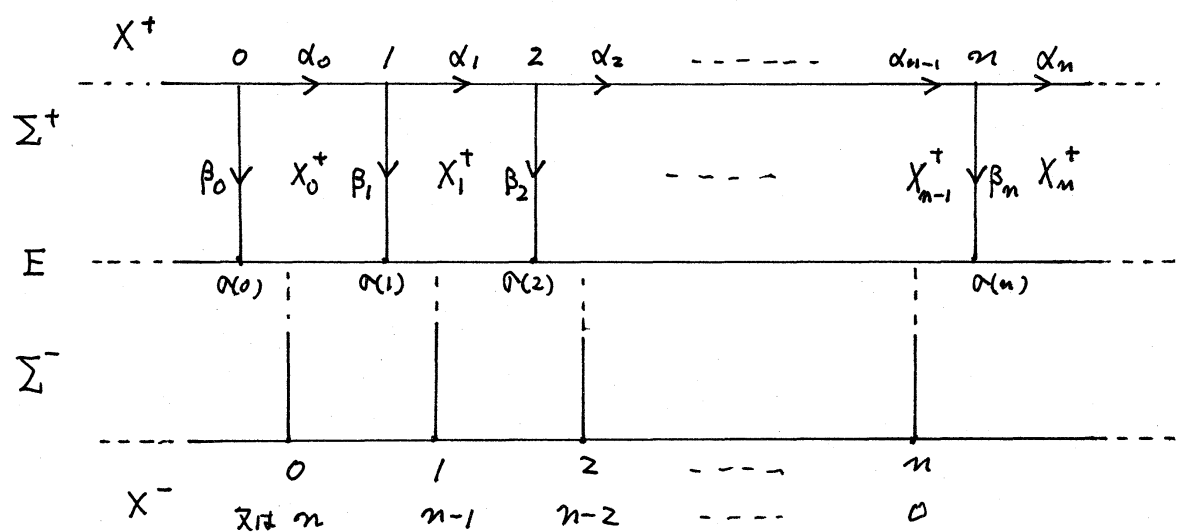
(iii) $S^2 - G$ の component の closure の対応する pair に
 適当に $+$, $-$ を付けて X_i^+ , X_i^- と書くとき, $\cup X_i^+$ は 2-ball
 with boundary E となる。 $\Sigma^+ = \cup X_i^+$, $\Sigma^- = \cup X_i^-$ と書く。

DS-diagram with E-cycle を考へる背景は石井理論に
 なる次の Propositions である。詳細は石井氏の preprint :
 Flows and Spines 及び本巻での氏の記事を参照のこと。

Prop. 1 任意の closed 3-manifold は flow-spine
 を持つ。

Prop. 2 flow-spine から作った DS-diagram は E-cycle を持つ。

例えば, Seifert-Threlfall の教科書にある Dodecahedral space は DS-diagram with E-cycle になっている。



で与えられる DS-diagram にはどんなものがあるか, 又, どんなものがないかについて報告する。

どんなものがあるか, 解った結果を先に書きます。

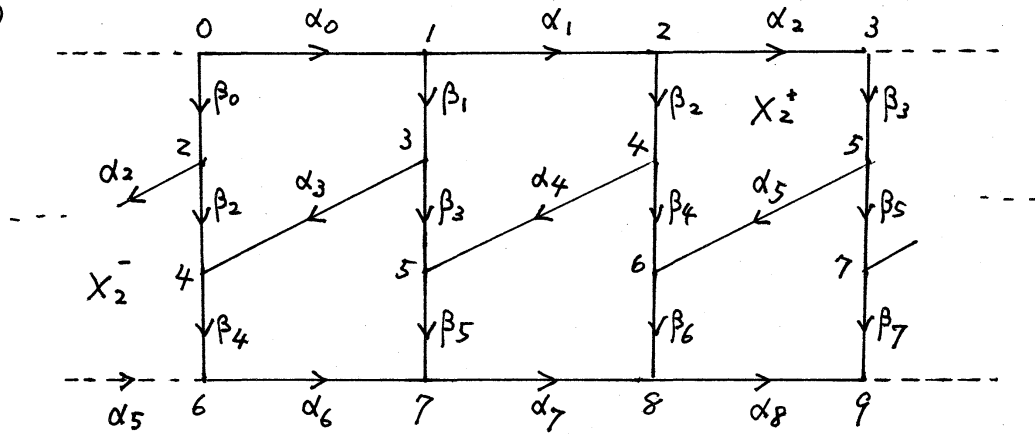
$S_2(E)$ が loop を持つ場合。

1. K.524 の list 中の (1-3)
2. K.524 の list 中の (2-7)
3. K.524 の list 中の (2-10)

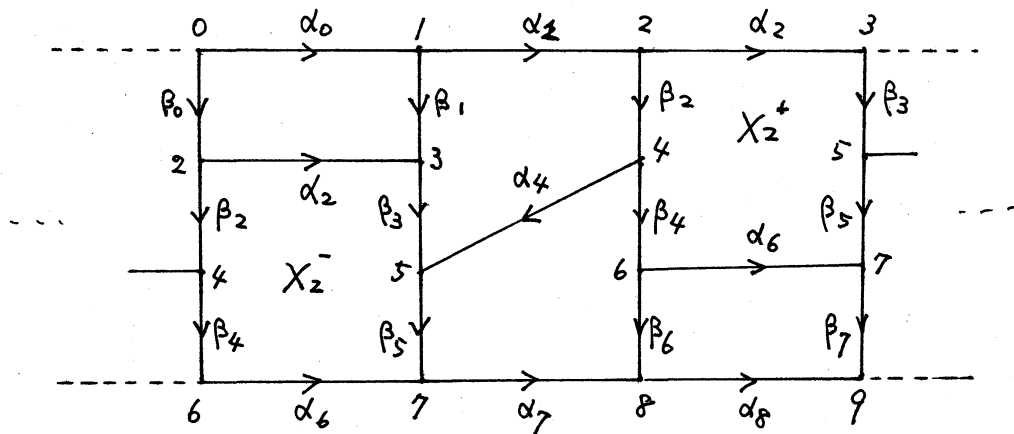
以上の三つはありません, --- 今の所は。

次に $S_2(F)$ が loop を持たない場合.

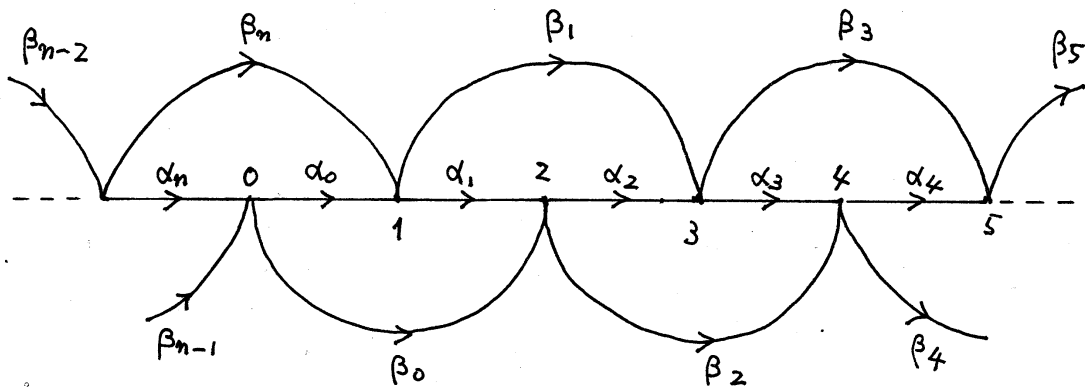
(A)



(B)



$S_2(F)$ は次の通り。



の2種類が無限個の class として解っている。他にもあるだろう。これ等については、慶応大・石井、神戸大・河野の両氏も存在を知って筆者に知ろせてくれた。

これは決して奇でず。ほうではないので、その生束する考察のうっすけっけと記す。

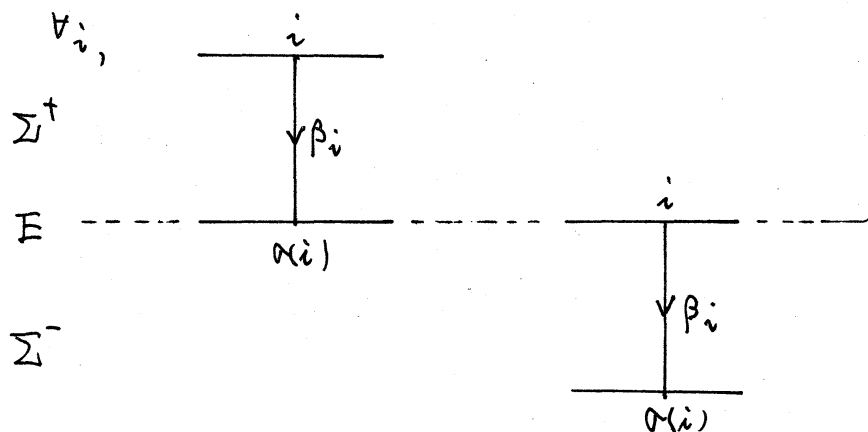
Lemma 1 E 上では α と β が交互に並んでいる。

X_i が p_i 角形であるとする。

Lemma 2 $v_i, 4 \leq p_i \leq 6$.

Lemma 3 $v_i, p_i + p_{i+1} \neq 8$
 $p_i + p_{i+1} \neq 12$

Lemma 4 $v_i,$



4, 5, 6 角形の edges が E 上でどう現われるかを調べると、次が得られる。

Lemma 5 σ は $\{0, 1, \dots, n\}$ の permutation で,
 $\forall i, \quad |\sigma^3(i) - \sigma^3(i+1)| = 1$

σ^3 は本質的に 2通りあるが、まず

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 0, 1, 2, \dots, n \\ p, p+1, p+2, \dots, p+n \end{pmatrix} \pmod{n+1}$$

とあるが、これでは σ がどうも良く判らない。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0, 1, 2, \dots, n \\ q, q+1, q+2, \dots, q+n \end{pmatrix} \quad q \neq 0$$

の Case を調べる事にする。

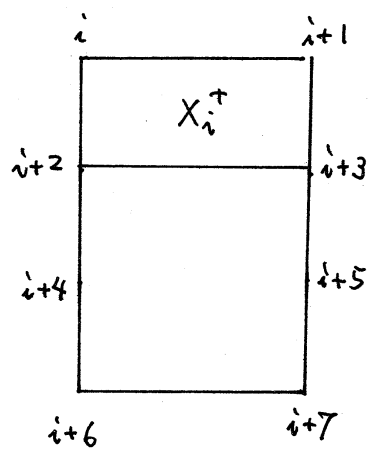
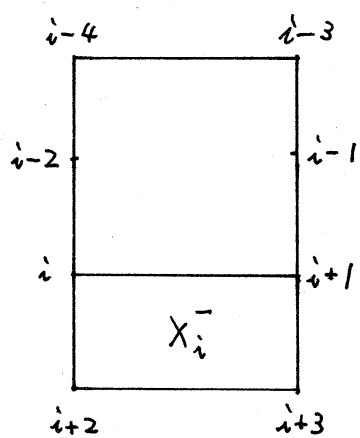
Lemma 6 $\exists i \rightarrow p_i = 5 \Rightarrow |q| = 2.$

Lemma 7 $\forall n, \exists i \rightarrow p_i = 5.$

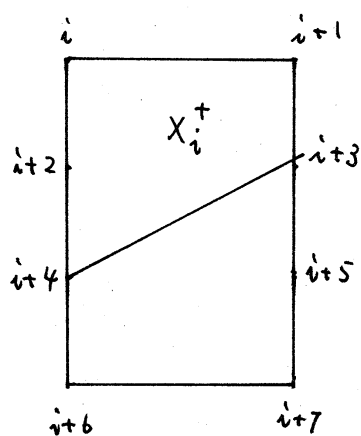
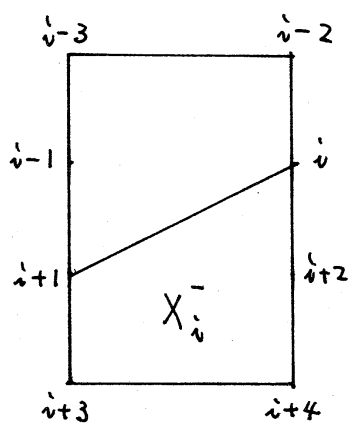
$q=2$ と $q=-2$ の DS-diagram は同じものである。

$q=2$ として、DS-diagram 上で 4, 5, 6 角形の相棒がどの辺に居るのかを調べておく。

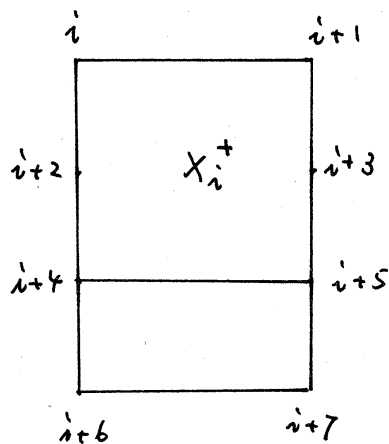
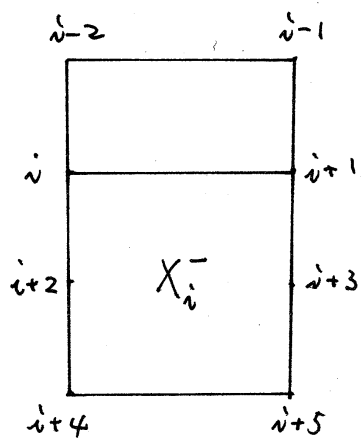
4角形.

 Σ^+ Σ^-  Σ^+ Σ^-

5角形.



6角形.



となって $p, 3$ で挙げた図が立ってくる。 $g=0$ の時 α loop のある場合となる。

次に、どんなものがないかを少し述べる。

$$\alpha^3 = \begin{pmatrix} 0, 1, 2, \dots, n \\ p, p+n, p+n-1, \dots, p+1 \end{pmatrix}$$

と仮定する。

番号を付け換えるこ、

$n: \text{even}$

$$\Rightarrow \alpha^3 = (0)(1, n)(2, n-1) \dots \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1\right)$$

$n: \text{odd}$

$$\Rightarrow (A) \alpha^3 = (0, 1)(2, n)(3, n-1) \dots \left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2} + 1\right)$$

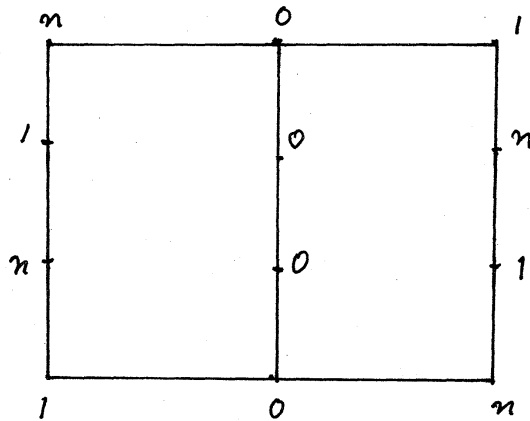
$$\text{又は (B) } \alpha^3 = (0)(1, n)(2, n-1) \dots \left(\frac{n+1}{2}\right)$$

巡回置換の積として $\sigma = \sigma_0 \dots \sigma_n$ とおく。

Lemma 8 $\forall i, \text{ord } \sigma_i \neq 3, \text{ord } \sigma = 2 \text{ or } 6$.

$n: \text{even}$ の時と、 $n: \text{odd}$ (B) は $0, 1, n$ の部分相同じである。

この時.



とならざるを得ないが、これでは face の identification が出来ない事が解る。

Prop. 3 $n: \text{even}$, $n: \text{odd}(B)$ に対する DS-diagram は存在しない。

だから、可能性のあるのは $n: \text{odd}(A)$ であるが、上と同様の議論で、

Prop. 4 $n: \text{odd}(A)$, $\text{ord } \alpha = 2$ に対する DS-diagram は存在しない。

となつて居るのは $n: \text{odd}(A)$, $\text{ord } \alpha = 6$ の case であるがこれは殆ど解らない。

せいぜい次ぐらいしか判。ていふい。

$$\sigma_0 = (0, p, q, 1, \sigma(1), \sigma^2(1)) \quad \text{とかく。}$$

Lemma 9. $\sigma_0^3 = (0, 1)(p, 1-p)(\frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2})$

勿論 $p \neq 0, 1, \frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}$

Remark. p.3 (A) についての詳しい分析は本巻石井氏の記事を参照して下さい。興味深い内容です。

Remark p.3 (A) で $n=4$ の時が Dodecahedral space で教科書の図と一致している。又, p.3 (A), (B) は両方共, Seifert-Threlfall の identification の条件を満たしている。